7/3/16

·Ένα πρόβλημα είναι σε τυπική μορφή:
(i) είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης
(ii) όλοι οι περιορισμοί-εξισώσεις με μη αρνητικούς σταθερούς όρους.
(iii) όλες οι μεταβλητές μη αρνητικές.

·Άρα στην ουσία ένα πρόβλημα της μορφής:

$$\max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$- - - - - - - - - -$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$
$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0, \quad b_1, \dots, b_n \geq 0.$$

max cx

$Ax = b$, $x, b \geq 0$.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- min $2x_1 + 3x_2 - 5x_3$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 10 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\leq -5 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 &\leq 6. \\ x_1 \in \mathbb{R}, \ x_2 \geq 0, \ x_3 &\leq 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} -\max -(2x_1 + 3x_2 - 5x_3) \\ x_1 + x_2 &= 10 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 &\geq 5 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 &\leq 6 \\ x_1 \in \mathbb{R}, \ x_2 \geq 0, \ x_3 &\leq 0. \end{aligned}$$

(κάτω ανισότητες - ισότητες) $\longrightarrow$ $-\max \ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 10 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - x_4 &= 5 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + x_5 &= 6 \\ x_1 \in \mathbb{R}, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \leq 0, \ x_{4,5} &\geq 0 \end{aligned}$$

μπορώ να γράψω ως διαφορά δύο μη-αρνητικών.

$x_1 = x_1' - x_1''$

$x_1', x_1'' \geq 0.$

$x_3 = -x_3'$

$x_3' \geq 0$

$$-\max \; -2(x_1'-x_1'')-3x_2-5x_3'$$
$$\begin{aligned} x_1'-x_1''+x_2 \quad\quad\quad &= 10 \\ 2(x_1'-x_1'')-3x_2+4x_3'-x_4 &= 5 \\ 7(x_1'-x_1'')-4x_2-x_3' \quad +x_5 &= 6. \end{aligned}$$
$$x_1', x_1'', x_2, x_3', x_4, x_5 \geq 0.$$

• $\min \; x_1+2x_2+3x_3$
$$\begin{aligned} x_1+2x_2 \quad &\leq 40 \\ x_1-x_2+x_3 &= 30 \\ x_1-3x_2-2x_3 &\geq -50 \\ x_2+x_3 &\geq 25 \end{aligned}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \;, x_3 \in \mathbb{R}$$

$\rightsquigarrow$

$$-\max -(x_1+2x_2+3x_3)$$
$$\begin{aligned} x_1+2x_2 \quad &\leq 40 \\ x_1-x_2+x_3 &= 30 \\ -x_1+3x_2+2x_3 &\leq 50 \\ x_2+x_3 &\geq 25 \end{aligned}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \;, x_3 \in \mathbb{R}$$

$$-\max -(x_1+2x_2+3x_3)$$
$$\rightsquigarrow \begin{aligned} x_1+2x_2 \quad\quad +x_4 &= 40 \\ x_1-x_2+x_3 \quad\quad &= 30 \\ -x_1+3x_2+2x_3 \quad +x_5 &= 50 \\ x_2+x_3 \quad\quad -x_6 &= 25 \end{aligned}$$
$$x_1, x_2, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \;, x_3 \in \mathbb{R}$$

$$-\max -(x_1+2x_2+3x_3)$$
$$\rightsquigarrow \begin{aligned} x_1+2x_2 \quad\quad +x_4 &= 40 \\ x_1-x_2+(x_3'-x_3'') \quad &= 30 \\ -x_1+3x_2+2(x_3'-x_3'') \quad +x_5 &= 50 \\ x_2+(x_3'-x_3'') \quad\quad -x_6 &= 25 \end{aligned}$$
$$x_1, x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

(Άσκηση)

$$\max\ x_1+2x_2-x_3$$
$$x_1-x_2+x_3 \geq -1$$
$$x_1-x_2 \leq 5$$
$$x_1\leq 0,\ x_2\in\mathbb{R},\ x_3\geq 0$$

Ας πούμε : $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^m$

$$a=\lambda_1 a_1+\dots+\lambda_m a_m \quad \lambda_i\in\mathbb{R}$$

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_1 a_1+\dots+\lambda_m a_m=0\\ &\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_m=0\end{aligned}\right\}\text{γρ. ανεξάρτητα}$$

Αν έχω $Ax=b$.

$r(A)=r(A|b)$ για να έχω λύση.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix} \quad A=(P_1, P_2, \dots, P_m)$$
$$x_1P_1+x_2P_2+\dots+x_mP_m=b$$

• $\max\ 3x_1+5x_2-2x_3+x_4$

$$x_1-x_2+x_3+x_4=5$$
$$2x_1+x_2+2x_3=1$$
$$x_i\geq 0$$

$$\begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix} \\ P_1\ \ P_2\ \ P_3\ \ P_4 \end{array}$$

4 μεταβλητές - 2 εξισώσεις

1) $x_1=x_2=0$

$x_3+x_4=5$ βασικές μεταβλητές

$2x_3=1$

$x_3=1/2 \quad x_4=9/2$

$$B=(P_3,P_4)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

2) $x_1 = x_3 = 0$

$\underline{x}_B = (x_2 = 1, x_4 = 6)'$

3) $x_1 = x_4 = 0$

$\underline{x}_B = (x_2 = -3, x_3 = 2)'$

4) $x_2 = x_3 = 0$

$\underline{x}_B = (x_1 = 1/2, x_4 = 9/2)'$

5) $x_2 = x_4 = 0$

$\underline{x}_B = (P_1, P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

6) $x_3 = x_4 = 0$

$\underline{x}_B = (x_1 = 2, x_2 = -3)$

Όμως κάποια $x_i < 0$ άρα έχω πρόβλημα με τους περιορισμούς που έχω θέσει.

$A\underline{x} = b$

$$[B, N] \begin{bmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{bmatrix} = b \Rightarrow \underline{x}_B = B^{-1} b - B^{-1} N \underline{x}_N$$

$$\underline{x}_B = B^{-1} b$$

- Βασική εφικτή λύση, εκείνη η βασική λύση που έχει όλες τις μεταβλητές μη αρνητικές.

- Αν έχω βασική εφικτή λύση και μια από τις βασικές μηδέν τότε την λέω εκφυλισμένη.

$\max c'x$

$A\underline{x} = b$

$x, b \geq 0$

Έστω $F \neq \phi$ εφικτή περιοχή. Αν το F είναι φραγμένο τότε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (π.γ.π) έχει άριστη λύση.

$x_n \in F$ και να δείξω ότι $\lim x_n \in F$ ώστε να είναι κλειστό.

$x_n \geq 0 \Rightarrow \lim x_n \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$Ax_n = b$, $\lim Ax_n = b \rightarrow Ax = b$.

F κλειστό και φραγμένο $\Rightarrow$ άρα συμπαγές, άριστη λύση

1) Κυρτός συνδυασμός των $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ ορίζεται κάθε σημείο της μορφής $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda x_i$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$

2) Ένα σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται κυρτό αν $\forall x_1, x_2 \in K$ $0 < \lambda < 1$ ισχύει $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in K$

3) Ακρότατο σημείο ενός κυρτού συνόλου K είναι κάθε σημείο x του K τέτοιο ώστε δεν υπάρχουν $x_1, x_2 \in K$ $0 < \lambda < 1$ έτσι ώστε $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$

▷ Κυρτό πολύεδρο του $\mathbb{R}^n$

$\{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \quad \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\}$

Τα ακρότατα σημεία ενός κυρτού πολυέδρου η ενός κυρτού συνόλου όταν είναι πεπερασμένα σε πλήθος λέγονται κορυφή.

▷ Η εφικτή περιοχή F είναι κυρτό σύνολο

(Δύο σημεία στην εφικτή περιοχή, $x_1, x_2 \in F$ πρέπει να δείξω ότι $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in F$

αφού $x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$ ανήκουν στην F $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \geq 0$

$A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda A x_1 + (1-\lambda)Ax_2 = \lambda b + (1-\lambda)b = b.$

▷ Αν η εφικτή περιοχή είναι φραγμένο σύνολο, τότε η άριστη λύση εμφανίζεται σε ακρότατο σημείο (κορυφή) της F.

▷ Έστω $x^* \in F$ σημείο που παρουσιάζουμε μέγιστο. Θ.δ.ο αυτό είναι κορυφή.
Έστω x_i είναι κορυφή.
$x^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$, $\lambda_i \geq 0$ $\sum \lambda_i = 1$
$c\, x^* = c \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_p)$
(ιδιότητα γραμμικής συνάρτησης)
όπου $f(x_p) = \max\{f(x_i)\}$.
x^* άριστη λύση , $f(x^*) \geq f(x_p)$
$f(x^*) \leq f(x_p)$
Συνεπώς η άριστη λύση μου βρίσκεται σε κορυφή.

• Αν δύο ή περισσότερες κορυφές είναι άριστες λύσεις τότε και κάθε κυρτός τους συνδυασμός είναι άριστη λύση.

▷ Έστω $x_1, x_2, \dots, x_r$ κορυφές που μου δίνουν άριστη λύση. Παίρνω τον κυρτό τους συνδυασμό $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i$

$z = f(x_i) = c x_i \quad i = 1, \dots, r$
$f(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c x_i = \sum_{i=1} \lambda_i f(x_i) = z$

• Αν x είναι β.ε.λ τότε x είναι κορυφή της F. (και αντίστροφα)

▷ $\underset{\sim}{x}$ β.ε.λ κ θετικές ανεξαρτημένες $(k \le m)$ βασικές

$\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$

$\underline{P}_1 \ \underline{P}_2 \ \ \underline{P}_k$ γρ. ανεξάρτητα διανύσματα (στήλες) του A. Ας υποθέσουμε ότι $\underset{\sim}{x}$ δεν είναι κορυφή. Τότε $\exists x_1, x_2 \in F$ με $x_1 \neq x_2$, $0 < \lambda < 1$

$x = \lambda \underline{x}_1 + (1-\lambda)\underline{x}_2$

$x_1 = \lambda x_{11} + (1-\lambda)x_{12}$

$x_2 = \lambda x_{21} + (1-\lambda)x_{22}$

$x_3 = \lambda x_{31} + (1-\lambda)x_{32}$

$- \ - \ - \ - \ - \ - \ -$

$x_k = \lambda x_{k1} + (1-\lambda)x_{k2}$

$0 = \lambda x_{k+1,1} + (1-\lambda)x_{k+1,2}$

$- \ - \ - \ - \ - \ - \ -$

$0 = \lambda x_{n1} + (1-\lambda)x_{n2}$

$(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{k1}, 0, \dots, 0)' = \underline{x}_1$

$(x_{12}, x_{22}, \dots, x_{k2}, 0, \dots 0)' = \underline{x}_2$

x_1, x_2 ανήκουν στην εφικτή περιοχή άρα ικανοποιούν τους περιορισμούς.

$$\left.\begin{array}{l} A\underset{\sim}{x}_1 = \underset{\sim}{b} \\ A\underset{\sim}{x}_2 = \underset{\sim}{b} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{k} x_{j1} \underline{P}_j = b \\ \sum_{j=1}^{k} x_{j2} \underline{P}_j = b \end{array}\right\} \quad \sum_{j=1}^{k} (x_{j1} - x_{j2})\underline{P}_j = 0$$

$x_{j1} = x_{j2}$, $\underset{\sim}{x}_1 = \underset{\sim}{x}_2$ άτοπο

Αν $\underset{\sim}{x}$ είναι κορυφή της F τότε $\underset{\sim}{x}$ είναι β.ε.λ.

$\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)'$ $\quad k \le n$

$\underline{P}_1, \underline{P}_2, \dots, \underline{P}_k$ στήλες του A γρ. ανεξάρτητες (αυτό θέλαμε να δείξουμε). Έστω ότι είναι γρ. εξαρτημένες, $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ όχι όλα μηδέν ώστε

$\lambda_1 \underline{P}_1 + \dots + \lambda_k \underline{P}_k = 0$ (1)

$x_1 \underline{P}_1 + \dots + x_k \underline{P}_k = b$.

Από την (1): $(x_1+\theta\lambda_1)\underline{P}_1 + \dots + (x_k+\theta\lambda_k)\underline{P}_k = \underline{b}$

$(x_1-\theta\lambda_1)\underline{P}_1 + \dots + (x_k-\theta\lambda_k)\underline{P}_k = \underline{b}$

$\underline{x}_1 = (x_1+\theta\lambda_1, \dots, x_k+\theta\lambda_k, 0, \dots, 0)'$ ικανοποιούν τους

$\underline{x}_2 = (x_2-\theta\lambda_1, \dots, x_k-\theta\lambda_k, 0, \dots, 0)'$ περιορισμούς.

$A\underset{\sim}{x}_1 = \underline{b}$ θα πρέπει να επιλεγεί το θ με τέτοιο τρόπο

$A\underset{\sim}{x}_2 = \underline{b}$ ώστε $x_i+\theta\lambda_i \geq 0$, $x_i-\theta\lambda_i \geq 0$ και τότε

τα $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2$ ανήκουν στην εφικτή περιοχή.

Τότε $\underset{\sim}{x} = \frac{1}{2}\underset{\sim}{x}_1 + \frac{1}{2}\underset{\sim}{x}_2$ πράγμα που είναι άτοπο

γιατί το $\underset{\sim}{x}$ κορυφή.

$\max c'x \quad Ax=b,\ x,b\geq 0$

$\underline{P}_1 x_1 + \underline{P}_2 x_2 + \dots + P_n \underline{x}_n = \underline{b}$

x_0 μια αρχική μη-εκφυλισμένη β.ε.λ που

σημαίνει ότι $\underline{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}, 0, \dots, 0)$ $x_{i0}>0$.

$i=1 \dots m$. Αφού είναι λύση του προβλήματος που

ικανοποιεί τον περιορισμό:

$x_{10}\underline{P}_1 + x_{20}\underline{P}_2 + \dots + x_{m0}\underline{P}_m = \underline{b}$

$x_{10}c_1 + x_{20}c_2 + \dots + x_{m0}c_m = z_0$

οποιοδήποτε άλλο μπορεί να γραφεί:

$x_{1j}\underline{P}_1 + x_{2j}\underline{P}_2 + \dots + x_{mj}P_m = \underset{\sim}{P}_j \quad, j=1 \dots n$

$x_{1j}c_1 + x_{2j}c_2 + \dots + x_{mj}c_m = z_j \quad, j=1 \dots n$

Το κριτήριο για να είναι η λύση άριστη:

Αν $z_j - c_j \geq 0 \ \forall j=1 \dots n$ τότε η μη εκφυλισμένη

β.ε.λ x_0 είναι άριστη.

Έστω $y_0 = (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$ μια άλλη λύση. Αρκεί να δείξουμε $z_0 = \underset{\sim}{c}' \underset{\sim}{x}_0 \geq \underset{\sim}{c}' y_0 = z_0^*$

y_0 λύση άρα ικανοποιεί τους περιορισμούς.

$$\sum_{j=1}^{n} y_{j0} \underline{P}_j = \underset{\sim}{b}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{j0} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \underline{P}_i = \underline{b}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \underline{P}_i \sum_{j=1}^{n} y_{j0} x_{ij} = \underset{\sim}{b} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{i0} P_i = \underset{\sim}{b} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \displaystyle x_{i0} = \sum_{j=1}^{m} y_{j0} x_{ij} \\ \displaystyle z_0 = c' \underset{\sim}{x}_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{i0} = \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n} y_{j0} \end{array}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{j0} \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} y_{j0} z_j$$

$$z_j \geq c_j \Rightarrow z_0 = \sum_{j=1}^{m} y_{j0} z_j \geq \sum_{j=1}^{n} y_{j0} c_j = z_0^*$$